Complétude des espaces $L_p, 1 \leq p \leq +\infty$.

Rémi Lajugie

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Théorème 1 *L'espace L^∞ est complet.*

Notons $\|\cdot\|$ la norme de L^∞. Preuve : Soit $\tilde{f_n}$ une suite de Cauchy de L^∞, f_n une suite de représentants. Soit $k > 0$ entier, N_0 tel que $\forall m, n > N_0, \|\tilde{f_m} - \tilde{f_n}\| < \frac{1}{k}$ et $A^k_{m,n}$ des ensembles de mesure nulle tels que sur le complémentaire de $A^k_{m,n}$, $\|f_m - f_n\| < \frac{1}{k}$. Alors si on note B l'intersection des $A^k_{m,n}$, alors sur B la suite des f_m est de Cauchy pour la norme du sup, elle converge donc vers une certaine fonction f uniformément sur B. On conclue en étendant f à X entier en posant $f(x) = 0$ sur le complémentaire de B.

Théorème 2 *L'espace $L^p, p < +\infty$, est complet.*

Preuve :

Notons $\|\cdot\|$ la norme de L^p. Soit f_n une suite de Cauchy de L^p. On en extrait une sous-suite f_{n_k} telle que $\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|^p < \frac{1}{2^k}$. La suite $g_N = \sum_{k=1}^N |f_{n_k} - f_{n_{k+1}}|$ [1] est une suite croissante de fonctions intégrables positives. Elle converge simplement vers une fonction g, alors par convergence monotone et inégalité de Minkowski on en déduit que g_N^p tend vers g^p et $\int g^p < 1$. D'autre part on a $f_{n_N} = \sum_{k=1}^N f_{n_k} - f_{n_{k+1}} \leq \sum_{k=1}^N |f_{n_k} - f_{n_{k+1}}|$. Or la fonction de droite converge simplement vers une fonction g dans L_p. En particulier, elle est finie sur le complémentaire d'un ensemble de mesure nulle B. Ainsi, f_{n_k} est une suite absolument convergente sur le complémentaire de B, donc elle converge simplement sur B vers une fonction f. Par le Lemme de Fatou, on en déduit que cette fonction est intégrable. Plus précisément, soit m tel que $\forall k, k' > m, |f_{n_k} - f_{n'_k}|^p < \epsilon$ et en faisant tendre k' vers l'infini $\int_X |f_{n_k} - f|^p \leq \epsilon^p$.

Références

— Rudin.

— Willem. (elements d'analyse fonctionnelle)

1. Pour s'affranchir du problème des fonctions définies presque partout, on suppose que les f_{n_k} sont des représentants de la classe correspondante, quitte à poser $f_{n_k}(x) = 0$ sur un ensemble de mesure nulle.