La dualité en programmation linéaire.

Rémi Lajugie

On se place dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 1 *Soit A une matrice de taille $m \times n$, $b, c \in \mathbb{R}^n, c \neq 0$. On appelle programme linéaire sous forme standard le problème d'optimisation suivant :*

$$\begin{aligned} \inf. \quad & c^\top x & (1)\\ s.c \quad & Ax = b & (2)\\ & x \geq 0. & (3) \end{aligned}$$

On le note (P_s).

Définition 2 *Soit A une matrice de taille $m \times n$, $b, c \in \mathbb{R}^n, c \neq 0$. On appelle programme linéaire sous inégalités le problème d'optimisation suivant :*

$$\begin{aligned} \inf. \quad & c^\top x & (4)\\ s.c \quad & Ax \leq b. & (5)\\ & & (6) \end{aligned}$$

On le note (P_i).

Définition 3 *On dit qu'un problème d'optimisation est faisable s'il existe un élément x satisfaisant les contraintes.*

Définition 4 *Un problème d'optimisation faisable est dit réalisable si l'infimum du problème est fini.*

Proposition 1 *Si un problème d'optimisation linéaire est réalisable de valeur optimale p^* alors il existe x^* tel que $c^\top x^* = p^*$.*

Preuve de la proposition :

Sans perte de généralité, on peut supposer que 0 est dans l'ensemble de contraintes (quitte à changer de variable). Comme le problème est réalisable, il existe une suite minimisante $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Cas 1 : cette suite est bornée, donc, comme l'ensemble des contraintes est fermé, à valeur dans un compact. Quitte à extraire, on peut supposer que cette suite converge, et la limite vérifie bien $c^T x = p^*$.

Cas 2 : la suite n'est pas bornée. Comme l'ensemble des contraintes C est un convexe contenant 0, il est étoilé par rapport à 0. Donc la suite des $y_i = \frac{x_i}{\|x_i\|}$ est une suite bornée à valeur dans C qui est fermée. Quitte à extraire, on suppose que la suite des y_i converge vers y et on note $l = c^T y$. On a alors $\|y_i\| c^\top y_i$ qui est équivalente à $\|y_i\| l$. Comme le problème est réalisable on a forcément $l = 0$. Ainsi $x^* = 0$ est optimal.

Définition 5 *Soit* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m' \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^{m'}$. *On appelle fonction duale de Lagrange associée au problème* $inf_{x, Ax \leq b, Bx = c} f(x)$ *la fonction à valeurs dans* $\overline{\mathbb{R}}$ *suivante :* $g(\lambda, \mu) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + \lambda^\top (Ax - b) + \mu^\top (Bx - c)$.

On appelle problème d'optimisation dual, le problème :

$$\begin{aligned} \sup \quad & g(\lambda, \mu) && (7) \\ s.c \quad & \lambda \geq 0. && (8) \end{aligned}$$

Exemple : La fonction duale de Lagrange du problème P_i vaut $b^\top \lambda$ si $A^\top \lambda = -c$ et $-\infty$ sinon. On appelle problème dual le problème d'optimisation

$$\begin{aligned} \sup \quad & b^\top \lambda && (9) \\ s.c \quad & A^\top \lambda = -c, && (10) \\ & \lambda \geq 0. && (11) \end{aligned}$$

Proposition 2 *Dualité faible. On a toujours* $\sup_{\lambda \geq 0} g(\lambda, \mu) \leq \inf_{x, Ax \leq b, Bx = c} f(x)$.

Théorème 1 *Si le problème* P_i *est réalisable de valeur optimale* p^*, *alors on a dualité forte, c'est à dire que* $\exists z \in \mathbb{R}^m$ *tel que la fonction duale de Lagrange* $g(z) = p^*$.

Preuve

Soit x^* un point satisfaisant les contraintes qui soit optimal.

On pose alors $I = \{i \in 1, \ldots, m (Ax^*)_i = b_i\}$ l'ensemble des contraintes saturées. Si cet ensemble est vide alors il existe un voisinage ouvert de x^* qui satisfait les contraintes mais alors $c^T x^*$ est nul dans toutes les directions (vu x^* optimal, une direction de valeur non nulle donnerait une direction de montée) donc on serait dans le cas $c = 0$ que nous excluons.

On note a_i la ième ligne de A. On pose $B = x, \exists z \geq 0, \sum_{i \in I} z_i a_i = x$.

Nous admettons que c'est un cône convexe fermé (c'est la fermeture qui n'est pas évidente mais qui peut se faire par une sorte de récurrence). *Etape 1 : on montre que* $-c \in B$

Supposons que ce ne soit pas le cas, on peut alors trouver un hyperplan séparateur strict entre $-c$ et B donc il existe α, β tels que $-c^T \alpha + \beta < 0$ et $\forall z \in B, z^T \alpha + \beta > 0$. Comme $0 \in B$, $\beta > 0$ Fixons $z \in B$, comme B est un cône, on a en fait $\forall \lambda > 0, z^T \alpha > \beta / lambda$ donc $z^T \alpha \geq 0$ en passant à la limite.

Comme $\beta > 0$, il vient que $c^T \alpha > 0$. Ainsi on peut considérer $x_\epsilon = x^* - \epsilon \alpha$. Pour $i \in I$, on remarque que $(Ax_\epsilon)_i \leq b_i$ et si $i \in I$, la contrainte n'était pas saturée, donc pour $\epsilon < \min_{i \notin I}(b_i - Ax^*)$ on a que la contrainte n'est pas saturée. On en déduit alors que x^* ne serait pas optimal. ce qui est contradictoire. Donc $-c \in B, -c = A^T \lambda$ avec $\lambda \geq 0$ et $\lambda_i = 0 \forall i \notin I$.

Etape 2 : vérifins que λ *convient*

par définition de la saturation il vient que $\lambda^T b = c^T x^*$ et on voit que λ est faisable.

Références

— Boyd.

— Ciarlet.

— In your head.