La décomposition effective de Dunford (Boyer-Risler)

Rémi Lajugie

23 janvier 2016

Commençons par rappeler le résultat suivant :

Lemme 1 *(Lemme fondamental) Soit A un endomorphisme inversible et N un endomorphisme nilpotent d'indice k tels que A et N commutent. Alors $A+N$ est inversible d'inverse $(\sum_{i=1}^{k} A^{-p}N^{p})$.*

Théorème 1 *Soit A une matrice sur un corps de caractéristique nulle dont le polynôme minimal est scindé $\mu_A = \Pi_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{m_i}$. Alors il existe un unique couple (D,N) composé d'une matrice diagonalisable et d'un endomorphisme nilpotent tel que $DN = ND$ et $A = D+N$. De surcroît D et N sont des polynômes en A. Il est possible d'obtenir la matrice D en considérant la récursion suivante :*

1. *Soit $Q = pgcd(\mu_A, \mu'_A)$.*
2. *$D_0 = A$.*
3. *$D_{k+1} = D_k - Q(D_k)Q'(D_k)^{-1}$.*
4. *s'arrêter quand $D_{k+1} = D_k$.*

La démonstration repose sur le lemme suivant :

Lemme 2 *A l'itération k, les assertions suivantes sont vérifiées :*

1. *$Q'(D_k)$ est inversible.*
2. *$Q(D_k)$ est un multiple de $Q(A)^{2^k}$.*
3. *D_k est un polynôme en A*

La preuve se fait par récurrence et en appliquant deux fois la formule de Taylor

Pour le théorème. Le lemme nous garantit tout d'abord que la récursion est bien définie. Puis que la récursion s'arrête en nous livrant une matrice D_n qui est un polynôme en A. Cette matrice est de plus annulée par le polynôme scindé à racines simples Q et elle est ainsi diagonalisable.

On remarque que $N = A - D_n = \sum_{i=1}^{n} {}_{i-1} - {}_{i}$ est une somme de nilpotents.

L'unicité se fait un supposant qu'un autre couple convient. Comme D et N sont des polynômes en A on arrive à $D - D' = N - N'$ avec tout le monde qui commute donc co-réductibles.