La table des caractères de S_4.

Rémi Lajugie

L'objectif de ce développement est de fournir une preuve de la formule dite des compléments.

Théorème 1 $\forall z, 0 < Re(z) < 1, \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{sin(\pi z)}$.

Nous aurons besoin de la proposition suivante :

Proposition 1 *Soit* $z, 0 < Re(z) < 1$, *alors* $I(z) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{z-1}}{1+u} du = \frac{\pi}{sin(\pi z)}$.

Preuve de la proposition :

On notera $\phi(u,z) = \frac{u^{z-1}}{1+u}$. Fixons le paramètre z une fois pour toute. Le calcul de l'intégrale repose sur la méthode des résidus. Remarquons que, vu notre choix de z, cette intégrale est bien définie, par domination.

Etape 1 : choix d'un logarithme

Dans la suite, on va se placer sur l'ouvert $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. On peut alors définir sur U un logarithme complexe, donc une fonction holomorphe telle que $\forall u \in U, e^{(z-1)(log(u))} = u^{z-1}$. Cela nous assure en particulier que $\phi(u,z)$ définit bien une fonction méromorphe dont le seul pôle est -1.

Etape 2 : Intégration sur un contour bien choisi

On choisit le célèbre contour du trou de serrure (keyhole en anglais) et on trouve alors que lorsque l'on fait tendre ϵ vers 0, comme la partie réelle de $z < 1$ on a l'intégrale correspondante qui tend vers 0, quand R devient grand l'intégrale sur le grand cercle disparaît, seules restes les branches parallèles autour de l'axe réel dont l'intégrale tend vers $(1 - \exp(2i\pi z)$ (appliquer la convergence dominée. *Etape 3 : calcul du résidu en -1*

$\phi(u,z)$ est le quotient de deux fonctions holomorphes et un développement limité nous donne que le résidu est égal à $\exp((z-1)i\pi) = -\exp(i\pi z)$.

Etape 4 : on conclue quant à l'intégrale.

On égalise les deux modes de calcul. et on obient le résultat annoncé.

Preuve de la formule des compléments.

On utilise le théorème de Fubini pour écrire que

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^{z-1} s^{-z} e^{-s-t} dt ds = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{s^\alpha} e^{-s-t} ds dt/t,$$

Un astucieux changement de variable $u = \frac{s}{t}, v = t + s$. Après s'être trompé plus d'une fois, on doit trouver que cette intégrale est exactement celle que nous avions calculé au dessus. Ce qui achève la démontration.

Références

— Schwartz, Méthodes mathématiques pour les sciences physiques.

— Amar Matheron.