Le groupe circulaire.

Rémi Lajugie

Définition 1 *On appelle groupe circulaire, le groupe des transformations bijectives du plan $P^1(\mathbb{C})$ qui conserve l'ensemble des cercles/droites.*

Proposition 1 *Soit a, b, c trois points du plan. Alors, le point d tel que $[a, b, c, d] = -1$ (on parle alors de division harmonique) est constructible uniquement en terme d'intersection et tangence de cercles et de droites.*

Preuve :

Il est fortement conseillé de suivre la démonstration crayon en main en faisant un dessin.

Etape 1 : on se ramène au cas simple Soit a, b, c trois tels points du plan. On envoie c à l'infini (tout en conservant a et b où ils sont) par une homographie ϕ. On construit les cercles de centre a et de rayon ab et de centre b et de rayon ab, on note m un de leurs points d'intersection de sorte que abm est un triangle équilatéral. On trace deux droites parallèles à ab coupant (am) et (bm) en x, z, y, t de telle sorte que $xytz$ soit un trapèze. On trace les diagonales de ce trapèze. Elles se coupent en un point O. La droite (Om) coupe (ab) en son milieu d. Ainsi on a construit le point en division harmonique.

Etape 2 : on retourne au cas initial On applique l'homographie inverse de ϕ. Par conservation du birapport, on sait que le point en division harmonique que nous recherchons sera $\phi^{-1}(d)$.

Comme elle préserve les cercles droites et est bijective, elle transforme les droites cercles projectifs (xyc) et (ztc) en deux droites cercles n'ayant qu'un seul point d'intersection par bijectivité. De même les images des cercles (xtc) et (ytc) n'ont qu'un seul point d'intersection $\phi^{-1}(O)$ et on construit le point en division harmonique comme intersection de (abc) et $(\phi^{-1}(m)\phi^{-1}(O)c)$ distinct de c.

Proposition 2 *Une bijection qui conserve les divisions harmoniques et telle que $\phi(0) = 0, \phi(1) = 1, \phi(\infty) = \infty$ est un automorphisme de corps de $\mathbb{C}$.*

Preuve :

Soit ϕ une telle application.

Etape 1 : ϕ est un morphisme additif de groupe. Comme ϕ préserve les milieux (division harmonique de $[a, b, \infty, c]$), $\phi(\frac{a+b}{2}) = \frac{1}{2}\phi(a) + \frac{1}{2}\phi(b)$. De plus en prenant $b = 0$, on trouve $\phi(a/2) = \frac{1}{2}\phi(a)$. On en déduit que $\forall a, b, \phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$.

De plus $\phi(a - a) = 0$ donc $\phi(-a) = -\phi(a)$.

Etape 2 : ϕ préserve les carrés. Soit $a \neq 0, 1$. On remarque que $[a, -a, a^2, 1] = -1$ donc $[\phi(a), -\phi(a), \phi(a^2), 1] = -1$, de cela on déduit que $\phi(a^2) = \phi(a)^2$ par unicité du point en division harmonique.

Etape 3 : ϕ est un morphisme multiplicatif.

On a $ab = \frac{1}{4}((a + b)^2 - (a - b)^2)$. Vu les deux points précédents on en déduit que $\phi(ab) = \frac{1}{4}((\phi(a) + \phi(b))^2 - (\phi(a) - \phi(b))^2) = \phi(a)\phi(b)$.

Théorème 1 *Le groupe circulaire est le groupe engendré par les homographies et la conjugaison complexe.*

Preuve :

Remarquons que la conjugaison complexe ainsi que les homographies préservent les cercles et les droites.

Soit f un élément du groupe circulaire. Quitte à composer par une homographie, on peut supposer que $f(\infty) = \infty$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. f est alors un automorphisme de corps par la proposition précédente et cet automorphisme stabilise $\mathbb{R}$, c'est donc l'identité ou la conjugaison complexe.

Références

— Audin.