Groupe des isométries du cube.

Rémi Lajugie

Dans ce document, on considère un cube que l'on note C_6. On le suppose centré en O. On note $Is(C_6)$ le groupe des isométries qui le stabilisent, et $Is^+(C_6)$ le groupe des rotations le stabilisant.

On numérote les sommets $(A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4)$ de sorte que les grandes diagonales du cube soient les segments $[A_i, B_i]$.

Proposition 1 *O est un centre de symétrie de C_6. Toute isométrie stabilise O.*

Cela implique en particulier que le groupe des isométries du cube peut être vu comme sous groupe du groupe orthogonal Euclidien.

Théorème 1 *Le groupe des isométries du cube est isomorphe au produit direct $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times S_4$. Le groupe des isométries positives est, quant à lui, isomorphe à S_4.*

Preuve :

Fait 1 *$-Id$ est une isométrie du cube, de déterminant -1.*

Etape 1 : construction du morphisme candidat

On considère l'application $\phi : Is(C_6) \to Is^+(C_6) \times \{\pm Id\}$, $\phi(g) = (g, Id)$ si g est une rotation, $\phi(g) = (-g, -Id)$. Cette application est un isomorphisme de groupes.

$\{\pm Id\}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. La proposition sera donc démontrée si l'on arrive à prouver que $Is^+(C_6)$ est isomorphe à S_4.

Fait 2 *Les grandes diagonales $[A_i, B_i]$ réalisent les plus grandes distances entre sommets du cube.*

On note D l'ensemble de ces grandes diagonales. Une isométrie du cube conservant les distances, elle envoie une grande diagonale sur une grande diagonale. On pose alors

$$\psi : g \in Is^+(C_6) \mapsto \sigma(g) \in S_4,$$

où $\sigma(g)$ est la permutation de D induite par g. On vérifie immédiatement que cette application est un morphisme de groupe.

Etape 2 : injectivité du morphisme

Soit $g_0 \in Ker(\psi)$, alors g_0 laisse chaque grande diagonale invariante. Supposons que g_0 ne soit pas l'identité. Comme les grandes diagonales ne sont pas coplanaires, il existe i tel que $g_0(A_i) = B_i$. Mais, comme g_0 est une isométrie, elle conserve les distances, donc $g_0(A_{i+1}) = B_{i+1}$, donc $[A_{i+1}, B_{i+1}]$ (comprendre l'addition des indices modulo 4). Donc g_0 est une isométrie qui coincide avec $-Id$ sur un repère du plan, c'est donc $-Id$ en personne. Mais alors g_0 n'est pas une rotation. On en déduit l'injectivité du morphisme.

Etape 3 : surjectivité du morphisme

Pour la surjectivité, nous allons voir que le morphisme atteint une partie génératrice. Notons que le retournement d'axe joignant le milieu de $[A_1, A_2]$ et le milieu de $[B_1, B_2]$ réalise une transposition entre deux grandes diagonales (disons D_1 et D_2) et une rotation d'axe joignant le sommet de deux faces opposées réalise un 4 cycle. Or une transposition et un 4 cycle engendrent S_4. On en déduit la surjectivité du morphisme.

Complément : dictionnaire entre isométries du cube et permutations

Faire un dessin pour voir cette section.

Les permutations de S_4 agissant sur les grandes diagonales du cube peuvent être réalisées par :

- Une rotation d'axe le centre de deux côtés diagonalement opposés et d'angle π pour une transposition.
- Une rotation d'axe une grande diagonale et d'angle $2\frac{\pi}{3}$ pour un $3-$cycle.
- Une rotation d'axe joignant le centre de deux faces opposées et d'angle $\frac{\pi}{2}$ pour un 4-cycle.
- Une rotation d'axe joignant le centre de deux faces opposées et d'angle π pour une double transposition.

Références

- H2G2.
- Alessandri (pour le dictionnaire).