Le théorème de Hadamard Lévy.

Rémi Lajugie

Théorème 1 *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^2 alors f est un C^1 difféomorphisme si et seulement si :*

1. *f est propre (la préimage de tout compact est compacte).*
2. *Df, la différentielle de f, est inversible en tout point.*

Remarque : En pratique, il est déraisonnable de vouloir faire en quinze minutes les deux sens.

Preuve : (sens direct) Si f est un C^1 difféomorphisme global, f vérifie le deuxième point (par le théorème d'inversion globale si l'on veut). D'autre part f est propre. En effet, soit K un compact de $\mathbb{R}^n$, comme f^{-1} est continue, elle transforme tout compact en un compact.

(sens réciproque) On va vérifier à la main les conditions du théorème d'inversion globale.

f est surjective Regardons $U = f(\mathbb{R}^n)$ alors U est fermé car si une suite $y_1 = f(x_1), \dots y_n = f(x_n)$ converge vers y comme f est propre, les x_i sont à valeurs dans un compact, on peut supposer que la suite converge, et la limite x vérifie $f(x) = y$ par continuité de f. Mais U est aussi ouvert car si $y = f(x)$ car f est un C^1 difféomorphisme local d'un voisinage de x sur un voisinage de $f(x)$ donc en particulier sur ces voisinages, l'équation $f(z) = y$ admet toujours une solution.

Par connexité de $\mathbb{R}^n$, l'image est $\mathbb{R}^n$.

f est injective Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Posons $g(x) = g(x) - g(x_0)$. $S = g^{-1}(0)$ *Vérifions que S est fini*

S est fini car s'il était infini, comme c'est un compact (f est propre) on pourrait extraire une suite qui converge vers un certain point x d'accumulation. Or par inversion locale, il ne peut y avoir qu'une solution à $f(z) = 0$ au voisinage de x.

On va introduire le système différentiel :

$$X' = -(Dg)^{-1}(g(X)).$$

Ce système satisfait les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz car fC^2.

Considérons la fonction $h(t) = g(x(t))$ alors $h'(t) = -2g(x(t))$. h satisfait une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on peut résoudre en $\exp(-t)g(x(t_0))$. On en déduit que toutes les trajectoires du système différentiel sont définies pour tout temps (on n'a pas explosion en temps fini). Ainsi, asymptotiquement, toutes les trajectoires du système différentiel tendent vers un élément de S.

Les éléments de S sont des équilibres asymptotiquement stables.

Soit $s \in S$, g étant un C^1 difféomorphisme local, on peut trouver un voisinage de 0, U et un de s, V, tel que g soit localement une bijection. Soit $x_0 \in U$, posons la fonction $t \mapsto g^{-1}(g(x_0)\exp(-t))$ cette solution satisfait le système différentiel et elle tend asymptotiquement vers s. Par le théorème de Cauchy Lipschitz c'est la solution unique du système passant par x_0. Ainsi pour chaque s_i il existe un voisinage ouvert W_i tel que $\forall x_0 \in W_i$, la trajectoire du système différentiel tende vers s_i.

Les W_i sont des ouverts disjoints par unicité de la solution d'un système différentiel.

Ils sont également fermé, car la fonction $\phi : (t, t_0, x_0) \mapsto x(t, t_0, x_0)$ est continue par Cauchy Lipschitz (version régularité en les conditions initiales).

On conclue alors par connexité.

Le théorème d'inversion globale peut donc s'appliquer.

Références

— Zavidovique.
— Zuily Quéffélec.