Le théorème de stabilité de Lyapunov (version Hubbard-West)

Rémi Lajugie

22 janvier 2016

Définition 1 *Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ un champ de vecteur localement Lipschitzien. On appelle fonction de Lyapunov une application $\mathcal{C}^1$ telle que :*

1. *L admet un unique minimum global en x_0.*
2. *$\forall x \in \mathbb{R}^n, \nabla L(x).f(x) < 0$.*

Théorème 1 *(Lyapunov) Soit f un champ de vecteur. x_0 un point critique de f ($f(x_0) = 0$) tel qu'il existe une fonction de Lyapunov au voisinage de x_0 alors x_0 est asymptotiquement stable.*

La preuve repose sur le lemme suivant :

Lemme 1 *Si L est une fonction de Lyapunov, alors $L(y(t))$ satisfait à l'équation différentielle $\frac{dL(y(t)}{dt} = \nabla L(y(t)).f(t)$.*

Vu le lemme, on déduit que L décroît strictement le long des trajectoires.

De plus L est minorée, donc si $y(t)$ est une solution de l'équation différentielle, $L(y(t))$ tend vers une limite l.

Remarquons que si $y(0) \in B(x_0, r)$ alors $\forall t > 0, y(t) \in B(x_0, r) \cup x, L(x) < \min(L(x), x \in S(x_0, r)$.. En effet par décroissance stricte, $y(t) \in x, L(x) < \max(L(x), x \in B(x_0, r)$ et par le théorème des douanes, la solution ne pourra pas s'échapper de la boule.

Supposons que cette limite ne soit pas $l_0 = L(x_0)$, alors $l > l_0$. L étant continue en x_0, on peut trouver $\delta > 0$ et une boule ouverte de tel rayon $B(x_0, \delta)$ telle que $\forall y \in B(x_0, \delta), |L(y)| < \frac{l}{2}$. En faisant l'intersection du complémentaire de cette boule ouverte ainsi que de l'adhérence de V ; on obtient un compact K sur lequel la fonction $g(y) = \nabla L(y).f(y)$ est toujours négative. on note $-M$ son maximum. Vu le lemme, on a alors que $L(y(t)) \leq -Mt$ ce qui fait que L décroît vers l'infini. Ce qui est contradictoire.

Théorème 2 *(théorème de stabilité en spectre négatif) Si* 0 *est point critique du champ de vecteur f et que sa différentielle a toutes ses valeurs propres de parties réelles strictement négatives. Alors* 0 *est asymptotiquement stable.*

Remarquons déjà qu'une rapide inspection avec la décomposition de Dunford nous montre que $\|e^{tA}x\|_2^2$ décroit exponentiellement vite.

La fonction $\phi(x, y) = \int_0^{+\infty} \langle e^{tA}x, e^{tA}y \rangle dt$ est bien définie par ce qui précède, symétrique, définie positive. $\Phi(x) = \phi(x, x)$ admet ainsi un unique minimum en 0.

Reste à voir qu'il s'agit d'une fonction de Lyapunov si l'on est suffisament proche du point critique 0.

Une formule de Taylor nous donne : $f(x) = Ax + \epsilon(x)$ où $\|\epsilon(x)\|$ est $o_0(\|x\|)$.

On a $\langle \nabla\Phi(x), f(x) \rangle = 2 \int_0^{+\infty} \langle \exp(tA + t^tA)x, Ax \rangle dt + 2 \int_0^{+\infty} \langle \exp(tA + t^tA)x, \epsilon(x) \rangle dt$. Or

$2 \int_0^{+\infty} \langle \exp(tA + t^tA)x, \epsilon(x) \rangle dt = o(\|x\|^2)$ et $\int_0^{+\infty} \exp(tA + t^tA)x, Ax \rangle dt = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} \|exp(tA)x\|^2 < 0$ puisque l'on a le spectre de A de parties réelles négatives. Donc au voisinage de 0, on Φ est une fonction de Lyapunov. Le théorème de stabilité en spectre négatif s'en déduit.