Théorème de récurrence/transience de Polya sur la marche aléatoire isotrope de dimension d.

Rémi Lajugie

Définition 1 *Soit $d > 0$, on appelle marche aléatoire isotrope la suite $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ telle que $X_t = X_{t-1} + Y_t$ où les Y_i sont i.i.d et telles que $\forall k \leq d, \mathbb{P}(Y_i = \pm e_k) = \frac{1}{2d}$. On considèrera toujours que la marche part de zéro.*

Définition 2 *Soit S_t la marche aléatoire isotrope de Z_d. Un état est dit récurrent si la probabilité de revenir une infinité de fois en cet état est non nulle.*

Définition 3 *On appelle temps de premier retour à zéro et l'on note $T_1 = \inf\{t, S_t = 0\}$.*

Proposition 1 *(régénérescence de la marche aléatoire) Soit $k > p$, alors $\mathbb{P}(S_k = 0|S_p = 0) = \mathbb{P}(S_{k-p} = 0)$.*

Proposition 2 *Soit $p = \mathbb{P}(T_1 < +\infty), k \in \mathbb{N}$, alors $\mathbb{P}(\exists t_1 < t_2 \ldots < t_k, S_{t_1} = 0, S_{t_2} = 0, \ldots S_{t_k} = 0) = p^k$.*

Proposition 3 *Si $p < 1$ alors la marche aléatoire est transiente. Elle est récurrente dans le cas contraire.*

Preuve :

La probabilité de revenir exactement k fois est donnée par $p^k - p^{k-1}$. la probabilité de revenir une infinité de fois est donc $q = 1 - \sum(p^k - p^{k-1})$.

Théorème 1 *On considère la marche aléatoire isotrope de $\mathbb{Z}^d$. Alors l'état zéro est récurrent si et seulement si $d < 3$*

Preuve

Soit $N = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{S_i=0}$. *Etape 1 : relier le caractère récurrent et transient à N*

Remarquons que, prenant l'espérance d'une variable positive, si $\mathbb{P}(N = +\infty) > 0$, $\mathbb{E}[N] = 0$ On a $\mathbb{E}[N] = \sum_{k=0}^{+\infty} k(p^k - p^{k-1})$. Ainsi, cette espérance est finie si, et seulement si $p < 1$, autrement dit si l'état est transient.

Etape 2 : calculer les $\mathbb{P}(S_t = 0)$

Pour cela, on calcule la fonction caractéristique de S_t, somme de t variables aléatoires iid, c'est donc la transformée de fourier de la convolée, c'est à dire, $\phi_Y(x)^t$. Or un calcul nous donne $\phi_Y(x) = \frac{1}{2d}(\sum_{i=1}^{d} cos(2\pi x.e_i)$.

Etape 3 : On calcule $\mathbb{E}[N]$

Remarquons que la fonction caractéristique de X est un polynome trigonométrique (il n'y a qu'un nombre fini de possibilités) donc on peut appliquer la théorie de convergence des séries de Fourier. Par inversion de Fourier on obtient une expression de $\mathbb{P}(S_t = 0) = \int_{[0,1]^d} \frac{1}{2d}(\sum_{i=1}^{d} cos(2\pi x.e_i)^t$. L'espérance est alors une série infinie. On introduit alors une série entière

$$\sum_{t=1}^{+\infty} \alpha^t \int_{[0,1]^d} \frac{1}{2d}(\sum_{i=1}^{d} cos(2\pi x.e_i)^t.$$

Cette série entière étant à coefficients positifs, sa limite en $1-$ va être la même que celle de $\mathbb{E}[N]$ par convergence monotone. A l'intérieur du disque de convergence, on peut permuter série et intégrale. On a une série géométrique dont on peut écrire la somme.

Il faut ensuite remarquer que

$$\lim_{\alpha \to 1^-} \sum_{t=1}^{+\infty} \alpha^t \int_{[0,1]^d} \frac{1}{2d}(\sum_{i=1}^{d} cos(2\pi x.e_i)^t = \lim_{\alpha \to 1^-} \int_{[0,1]^d} \frac{1}{1 - \alpha \frac{1}{2d}(\sum_{i=1}^{d} cos(2\pi x.e_i)}.$$

Ici, il faut faire une disjonction de cas, dans le cas où l'intégrale de la limite est finie, on peut appliquer le théorème de convergence dominée. Dans le cas où elle est infinie, le Lemme de Fatou nous permet de conclure.

Enfin, un développement limité nous montre que cette intégrale est de même nature que

$$\int_{[0,1]^d} \frac{1}{\|x\|^2}.$$

Complément de calcul intégral

Théorème 2 *(intégrales radiales) Soit V le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$, ϕ une application mesurable qui ne dépend que du rayon, $\phi(\|x\|)$. Alors $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(\|x\|)dx = \int_{\mathbb{R}_+} \phi(t)nt^{n-1}$.*

Preuve : l'application $\phi \circ \|.\|$ est mesurable si et seulement si ϕ est intégrable contre la mesure image de $\|.\|$. Or cette mesure peut être caractérisée. $m([0,a]) = Va^n = \int_[0,a]Vnt^{n-1}dt$.Ainsi on caractérise la mesure sur un π système qui engendre les boréliens de $\mathbb{R}$. On identifie ainsi que $dm(t) = Vt^{n-1}dt$.

Références

— Zavidovique.
— Garet Kurtzmann.
— Dym MacKean.