Théorème de Shannon.

Rémi Lajugie

Théorème 1 *Soit un signal $f \in L^2(\mathbb{R})$ continu, tel que $\mathcal{F}(f)$ soit à support borné inclus dans $[-c,c]$. Alors si $a < \frac{1}{2c}$, on a, au sens L_2 mais aussi au sens ponctuel,*

$$f(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} f(na) \frac{sin(\frac{\pi}{a}(t-na))}{\frac{\pi}{a}(t-na)}.$$

Preuve :

Etape 1 : périodisation du spectre et Formule de Poisson

On introduit $\hat{F}(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\frac{n}{a} - \xi)$. Cette fonction est la périodisée de F. De plus, comme $a < \frac{1}{2c}$ cette fonction est bien dans $L_2([-1/2a, 1/2a])$ (faire un dessin si besoin). Donc cette fonction est somme au sens L_2 de sa série de Fourier.

On a donc l'égalité au sens L_2,

$$\hat{F}(t) = \sum c_n(\hat{F}) \exp(2i\pi na).$$

On calcule $c_n(\hat{F})$. Elle est reliée à l'intégrale donnant l'inverse de Fourier de $\hat{F}$. Or cette intégrale définit une fonction continue sous le signe somme qui est, par la théorie de Fourier égale au sens $L_2(\mathbb{R})$ à F, mais f est continue donc elle est égale à cette formulation intégrale. On obtient dès lors la formule de Poisson :

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\frac{n}{a} - \xi) = \sum f(na) \exp(2i\pi\xi na).$$

Etape 2 : récupération du lobe central

On remarque que $\chi_{[-1/2a,1/2a]}\hat{F} = \hat{f}$ au sens ponctuel. Par continuité et linéarité de la transformée de Fourier inverse sur $L_2(\mathbb{R})$,on obtient que, au sens L_2, f est égale à $\sum f(na)\overline{\chi_{[-1/2a,1/2a]}\exp(2i\pi\xi na)}$, où l'on note $\bar{f}$ la transformée inverse, faute de meilleur symbole. Un calcul donne la formule avec les sinus cardinaux.

On a donc une égalité au sens L_2, on a en fait mieux.

Etape 3 : récupération de la convergence uniforme

Comme $\hat{f}$ a support borné, elle est dans L_1. Vu la définition de la transformée de Fourier inverse, on a $\forall t \in \mathbb{R}, |f_n(t) - f(t)| \leq \|\hat{f}_n - \hat{f}\|_1 \leq C\|\hat{f}_n - \hat{f}\|_2 =$ où $\hat{f}_n$ désigne la somme partielle de Fourier, l'inégalité venant de Cauchy Schwartz appliquée avec la fonction constante, et l'égalité de l'égalité de Parseval.

Références

— Willem.

— Gasquet et Wittomski.