Simplicité de $SO3(\mathbb{R})$.

Rémi Lajugie

Théorème 1 *Le groupe $SO3(\mathbb{R})$ des rotations de l'espace est un groupe simple.*

Preuve :
Soit H un sous groupe distingué de $SO3(\mathbb{R})$.
Etape 1 : on montre qu'il suffit de trouver un retournement dans H pour conclure.
Tout cela repose sur la proposition (admise, à mettre dans le plan) :

Proposition 1 *Les retournements engendrent $SO3(\mathbb{R})$.*

On va alors énoncer le résultat suivant puis le démontrer.

Proposition 2 *Les retournements sont conjugués dans $SO3(\mathbb{R})$.*

Supposons que l'on dispose d'un tel retournement r. Notons D son axe. Soit r' un autre retournement d'axe D'. Soit s dans $SO3(\mathbb{R})$ qui envoie D sur D' ($SO3(\mathbb{R})$ agit transitivement sur les droites), alors $r = s^{-1}r's$ car r et r' ont le même spectre et que l'axe D' est fixé par r'.

Comme le groupe H est distingué, il contient donc r'. Ainsi H contient le groupe engendré par les réflexions, c'est à dire, $SO3(\mathbb{R})$.

Etape 2 : on trouve un tel retournement.

Remarquons que $\forall g \in SO3(\mathbb{R}), \mathrm{Tr}(g)$ est de la forme $1 + 2\cos(\theta)$ par le théorème de réduction des endomorphismes normaux.

Soit $h \in H, h \neq id$ On considère l'application continue suivante :

$$\forall g \in SO3(\mathbb{R}), \phi(g) = \mathrm{Tr}(ghg^{-1}h^{-1}).$$

L'image de $SO3(\mathbb{R})$, compact connexe par cette application continue est donc un intervalle de $[-1, 3]$. Comme $\phi(id) = 3, \phi(SO3(\mathbb{R})) = [a, 3]$.

Si $a = 3$, alors $\forall g, \mathrm{Tr}(ghg^{-1}h^{-1})$ mais alors par le théorème de réduction des endomorphismes normaux on en déduit que $ghg^{-1}h^{-1}$ est l'identité. Ainsi $gh = hg, \forall g$ donc g homothétie, donc g est l'identité. Ce qui est contraire à ce que nous avions supposé.

Maintenant, si $a < 3$, comme $\mathbb{R}$ est archimédien et cos continue, il existe $n, 3 > 1 + 2\cos(2\pi/n)geqa$ donc il existe g tel que $\mathrm{Tr}(ghg^{-1}h^{-1})$ soit de la forme $1 + 2\cos(2\pi/n)$. Or $u = ghg^{-1}h^{-1} \in H$ par distinction. Elevons u à la puissance n on obtient alors que u est un retournement. Cela achève la démonstration.

Références

— H2G2.