Sous espaces stables par translation de dimension finie de $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Rémi Lajugie

Théorème 1 *L'ensemble des sous espaces de dimension finie stables par translation de $E = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, est l'ensemble des solutions d'une équation différentielle scalaire d'ordre n.*

Preuve : *Etape 1 : le sens réciproque est évident.*

L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n est stable par translation et de dimension n. Ce sont les fonctions de la forme $X_0 \exp(-tA)$, où A est la matrice compagnon du polynôme caractéristique de l'équation différentielle.

Etape 2 : sens direct, soit F un tel espace, on va montrer que F est un espace de fonctions dérivables.

Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une base de F. On introduit l'espace $G = Vect(g_i)$ où $g_i(t) = \int_{[0,t]} f_i(t)dt$.

Considérons l'espace $H = F + G$. H est de dimension m finie (au plus $2n$).

Etape 2 bis : on montre que n points suffisent à déterminer les fonctions.

Considérons la famille de formes linéaires $\delta_x : f \mapsto f(x)$ alors cette famille est génératrice du dual de H car si $\forall x, f(x) = 0, f = 0$. Donc par le théorème de la base incomplète, on peut en extraire une base. En d'autres termes il existe m points tels que l'évaluation en ces points déterminent la fonction.

Etape 2 ter : on introduit une norme Ainsi, via l'évaluation en ces n points, H est isomorphe à $\mathbb{R}^m$, on peut munir H de la norme $\max_{i \in \{1,\ldots,m\}}$. Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$, considérons alors les fonctions $\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, h_i^k(t) = \frac{g_i(t+1/k}{1/k}$. Cette suite de fonction converge vers la dérivée de g au sens de la norme. Et ces fonctions sont dans G qui est de dimension finie donc fermé.

Etape 3 : Conclusion De ce qui précède, on déduit que $F = G$. Ainsi les fonctions de F sont C_1 et, par récurrence immédiate, C_∞.

F est donc stable par dérivation. Or la dérivation est une application linéaire, elle admet donc un polynôme minimal Π de degré $\leq n$ (Cayley Hamilton). Ainsi toute fonction de F est solution d'une équation différentielle. Mais, le théorème de Cauchy Lipschitz nous assure que la dimension de l'espace des solutions est $\leq d$. Donc $d = n$.

Références

— Objectif agrégation.