Théorème de Stone Weierstrass réel.

Rémi Lajugie

Théorème 1 *Soit A une sous algèbre de $C(X,\mathbb{R})$ où X est un espace compact telle que*
- *A contienne les fonctions constantes.*
- *A sépare les points,* i.e., $\forall x, y \in X, \exists f \in A, f(x) \neq f(y)$.

Alors A est dense dans $C(X,\mathbb{R})$.

Preuve :

Etape 1 : Réduction au cas simple

Réduction 1 : on peut supposer A fermée.

Réduction 2 : On peut supposer f à valeur dans $[-1,1]$ car f est bornée et on peut remplacer f par $\tilde{f} = \frac{f}{max(f)}$.

Lemme 1 *Il existe un polynôme approchant uniformément la valeur absolue sur $[-1,1]$.*

Preuve : Admise, on peut considérer le développement limité de $(1+x)^\alpha$ et utiliser la formule de Taylor avec reste intégral.

Réduction 3 : On peut donc supposer que $\sup(f,g) = \frac{|f|+|g|}{2} + \frac{|f-g|}{2}$ et $\inf(f,g) = \frac{|f|+|g|}{2} - \frac{|f-g|}{2}$ est dans l'algèbre vu le lemme.

Etape 2 : Preuve dans ce cas simple

Soit $f \in A, \epsilon > 0$,

$\forall x \in X, y \in X$, on considère $f_y \in A$ telle que $f_y(y) = f(y)$, $f_y(x) = x$, une telle fonction existe car A sépare les points et contient les constantes (prendre h qui sépare x et y et alors si $\delta(y) = (h(x) - h(y))$, vaut 0 en x et 1 en y dès lors la fonction $g = f(x) + f(y)\delta$ convient.

On regarde ensuite les ensembles $O_y = (f_y - f)^{-1}(]-\epsilon, \epsilon[)$, ce sont des ouverts qui recouvrent X donc on peut en extraire un sous recouvrement fini. Soit $y_1, \ldots, y_n$ les points correspondant. On pose alors $h_x = \sup_i f_{y_i}$. On a alors, par construction, $\forall y, h_x(y) \geq f(y) - \epsilon$.

On considère ensuite les ensembles $(h_x - f)^{-1}(]-\epsilon, \epsilon[)$ et on en extrait un sous recouvrement fini. On pose finalement $h = \inf_i h_i$. On a alors $f(x) - \epsilon \geq h(x) \leq f(x) + \epsilon$.

Références

- Colmez.