La table des caractères de S_4.

Rémi Lajugie

Théorème 1 *La table des caractères de S_4 est la suivante :*

I	*(ab)*	*(abc)*	*(ab)(cd)*	*(abcd)*
1	*1*	*1*	*1*	*1*
1	*-1*	*1*	*1*	*-1*
2	*0*	*-1*		
3	*1*	*0*	*-1*	*-1*
3	*-1*	*0*	*-1*	*1*

Preuve

Etape 1 : collecter des informations sur la table

La formule de conjugaison dans le groupe symétrique nous donne 5 classes de conjugaison donc 5 caractères irréductibles.

Etape 2 : caractères de degré 1*.*

On connaît déjà la signature et la représentation identique.

Etape 3 : un caractère de degré 3*.* Le groupe symétrique agit par permutation sur les vecteurs de la base canonique. On obtient alors une représentation de caractère $\xi = (4, 2, 1, 0, 0)$. via le produit scalaire invariant, on obtient que $\langle \xi, \xi \rangle = 2$ et $\langle \xi, (1, 1, 1, 1, 1) \rangle = 1$. D'où la 4 eme ligne de la table.

Etape 4 : un caractère de degré 3 *via la représentation du cube.*

On sait que le groupe S_4 est isomorphe au groupe des isométries du cube. On a donc une correspondance entre des matrices de rotations dans l'espace (dont on peut calculer la trace) et S_4. Plus précisément on a le dictionnaire suivant :

— Une rotation d'axe le centre de deux côtés diagonalement opposés et d'angle π pour une transposition. Le caractère est alors -1.

— Une rotation d'axe une grande diagonale et d'angle $2\frac{\pi}{3}$ pour un $3-$cycle. Le caractère est alors nul.

— Une rotation d'axe joignant le centre de deux faces opposées et d'angle $\frac{\pi}{2}$ pour un 4-cycle. Le caractère vaut alors 1

— Une rotation d'axe joignant le centre de deux faces opposées et d'angle π pour une double transposition. Le caractère vaut alors -1.

En calculant le produit scalaire (celui qui est invariant pour le groupe) de ce caractère avec lui même, on obtient qu'il est irréductible. Ce qui complète une ligne de la table. *Etape 5 : on complète la dernière ligne.*

Par la relation $1 + 1 + 2^2 + 3^2 + 3^2 = 24$ on sait que la dernière représentation qui nous manque est de degré 2. On peut ensuite compléter via l'orthogonalité des colonnes.

Références

— Mansuy, Mneimné.

— H2G2.