Théorème de Brauer sur un corps de caractéristique quelconque.

Rémi Lajugie

Soit t un entier naturel. On considère une permutation de S_t.

Définition 1 *On appelle profil de la permutation $\sigma \in S_t$, le t-uplet $(n_1(\sigma), \dots, n_t(\sigma))$, où $n_i(\sigma)$ est le nombre de cycles de longueur i dans la décomposition en cycles disjoints de σ. On note également $\nu(\sigma) = \sum_{i=1}^{t} n_i(\sigma)$*

Théorème 1 *Deux permutations sont conjuguées si et seulement si elles ont le même profil.*

Théorème 2 *(Brauer) Soit σ_1, σ_2 deux permutations, P_1, P_2 les matrices de permutations associées dans $GL_t(k)$, alors ces matrices sont conjuguées en temps que matrices si, et seulement si, σ_1 et σ_2 le sont en temps que permutations.*

Preuve

Etape 1 : le sens direct est trivial Il suffit d'écrire que la représentation par matrice de permutation est un morphisme.

Supposons les matrices conjuguées. *Etape 2 : on lie ν et la dimension des sous espaces invariants*

Proposition 1 *On a $\nu(\sigma_1) = dim(Ker(P_1 - I))$.*

Preuve : en effet si $x \in Ker(P_1 - I)$ alors, si $\sigma_1 = c_1 \dots c_k$ (cycles à support disjoint), on a $\forall k, \forall i, j \in Supp(c_k)$, $x_i = x_j$. Réciproquement si x est constant sur les supports des cycles alors il est dans le noyau voulu. Le résultat s'obtient en passant aux dimensions.

Proposition 2 *On a $\forall k, \nu(\sigma_1^k) = dim(Ker(P_1 - I)) = \nu(\sigma_2^k)$.*

C'est une conséquence immédiate de la conjugaison de deux matrices.

Proposition 3 *(Lemme d'éclatement des cycles)Soit $c = (a_1, \dots, a_p)$ un cycle alors c^k est le produit de $p \wedge k$ cycles de longueurs $\frac{p}{p \wedge k}$.*

On en déduit que

Proposition 4 $\forall k, \nu(\sigma_1^k) = \sum (p \wedge k) n_p(\sigma_1)$

Chaque cycle de longueur p a éclaté en $p \wedge k$ sous cycles.

Etape 3 : résolution d'un système linéaire

En écrivant les relations de la proposition précédente pour k allant de 1 à t on obtient que $AN(\sigma_1) = AN(\sigma_2)$. On s'intéresse donc à l'inversibilité de la matrice du pgcd.

Or on a $A = T^T DT$ où $D = diag(\phi(1), \dots \phi(t))$ et T est la matrice triangulaire inversible telle que $T_{i,j}$ 1 si $i|j$, 0 sinon. On peut le voir par calcul. On en déduit que A est inversible. Ainsi les permutations ont le même profil.

Complément : preuve du lemme d'éclatement des cycles

Preuve : Soit a_i un élément du cycle On considère l'ensemble $B = \{a \in \mathbb{N}, c^a(a_i) = a_i\}$. C'est un ensemble non vide ordonné par la divisibilité dont le plus petit élément est p. On introduit $C = \{a, \in \mathbb{N}, c^{ka}(a_i)\}$. c'est un ensemble ordonné par la divisibilité qui admet un plus petit élément k'. On a $\frac{p}{p\wedge k} \in C$ donc $k' | \frac{p}{p\wedge k}$. On a aussi kk' est dans B donc $p|kk'$. Or $k = (p \wedge k)u$ avec $u \wedge p = 1$. Donc $p|(p \wedge k)k'|p$. Donc $k' = \frac{p}{p\wedge k}$

Références

— Sans...