Théorème de point fixe de Brouwer.

Rémi Lajugie

On appelle B la boule unité de $\mathbb{R}^n$ et S la sphère unité. On suppose que le volume de B est 1 pour simplifier.

Théorème 1 *(Lemme de non-rétraction C^1) Il n'existe pas de rétraction (une application de B dans S) de classe C^1*

Preuve : Elle se fait par l'absurde. Soit v une telle rétraction, on considère l'application $v_t = (1-t)I + tv$. On pose $J(t) = \int_B det(Dv_t(x))dx$. $J(t)$ est un polynôme car le determinant est polynômial en t

Etape 1 : $J(0) = 1, J(1) = 0$. En effet, si $t = 0, v_t$ est l'identité, si $t = 1$, la relation $\|v(x)\|_2^2 = 1$ dérivée nous donne que $\forall x \in B, Dv_t(x)(x) = 0$ donc la matrice jacobienne Dv_t est de rang déficient et son déterminant nul quel que soit x.

Etape 2 : Pour t petit v_t est un C^1 difféomorphisme global En effet, Dv_t est continue sur B compacte, soit $M = max_B(\|Dv_t(x)\| - I)$. Alors si t assez petit (strictement plus petit que $1/M$), on a $v_t = I - t(v - I)$ qui est inversible pour tout $x \in B$ par le lemme de la série géométrique de Von Neumann.

On va alors appliquer le théorème d'inversion globale pour t petit car :

— v_t est injective pour t assez petit. En effet, si $v_t(x) = v_t(y)$ on a $\frac{1-t}{t}(x-y) = v(x) - v(y)$, l'inégalité des accroissements finis nous donne $x = y$ si $t < \frac{1}{M}$.

— v_t est surjective car B $v_t(B)$ est

1. fermée, si on a une suite $(v_t(x_i))_{i \in \mathbb{N}}$ alors par compacité on peut extraire une sous suite convergente de $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Par continuité de v_t elle converge bien vers la limite.
2. ouverte, car v_t est un difféomorphisme local donc si $y = f(x) \in v_t(B)$ il existe un voisinage ouvert (dans $v_t(B)$) de y et un voisinage ouvert dans B de x tel que l'application soit un difféomorphisme local.

Par inversion globale, v_t est un C^1 difféomorphisme et on a que pour $t < \frac{1}{M}$, $J(t) = Vol(v_t(B) = Vol(B) = 1$ [1]. Donc J est localement constant donc c'est un polynôme constant qui vaut 1 en 0 et 0 en 1. C'est contradictoire.

Théorème 2 *(Brouwer cas C^1) Soit f une application de B dans B C^1, alors B admet un point fixe.*

Preuve : par l'absurde, supposons que f n'ait pas de point fixe. Alors, $\forall x \in B, f(x) \neq x$, les points x et $f(x)$ étant de norme inférieure à 1, la droite $(xf(x))$ coupe donc la sphère unité en deux points distincts que l'on peut retrouver analytiquement comme solution de $\|x + \lambda(x - f(x))\|^2 = 1$. Lorsque l'on développe cette expression, le discriminant est toujours > 0, par compacité la fonction discriminant $\delta(x)$ (qui est C^1) est à valeurs dans $[a, b]$ avec $b > a > 0$ donc l'application qui associe la plus grande racine du trinôme $\lambda(x) = (-b + \sqrt{\delta})/2(\|x - f(x)\|^2)$ définit une fonction C^1. On conclut alors en constatant que par construction $g(x) = x + \lambda(x - f(x))$ définit une rétraction C^1 sur la sphère. [2]

1. La première inégalité venant du théorème de changement de variable et du fait que $\forall x, \forall t < \frac{1}{M}$ on a $det(D_{v_t}(x))$ qui est non nul et comme ce déterminant est strictement positif pour $t = 0$, on n'a pas besoin de mettre la valeur absolue qui apparait dans le théorème de changement de variable.

2. Si l'on n'est pas convaincu par ce raisonnement, on peut faire les choses à la main, on peut développer le trinôme, on obtient $\lambda^2\|x - f(x)\|^2 + 2\lambda\langle x, x - f(x)\rangle + \|x\|^2 - 1 = 0$, ce qui donne après calcul un discriminant $\delta(x) = 4\langle x, x - f(x)\rangle^2 - 4\|x - f(x)\|^2(\|x\|^2 - 1)$ qui est strictement positif vu Cauchy Schwartz et $\|x - f(x)\| > 0$. Dès lors la fonction $\lambda(x) = \frac{-\langle x, x - f(x)\rangle + \sqrt{\Delta(x)}}{2\|x - f(x)\|^2}$ est C^1.11

Références

— Objectif agregation. (Lemme de Milnor)