Note sur l'histoire des nombres entiers négatifs.

Rémi Lajugie

25 octobre 2016

Résumé

Dans cette note, nous synthétisons un certain nombre de points de vue historiques sur les nombres négatifs, et plus généralement les entiers relatifs. Nous regardons tout d'abord leur place dans les grands textes mathématiques anciens (chez Diophante, dans les neufs chapitres pour la Chine, dans l'algèbre de Al-Khwarizmi). Ensuite nous nous intéressons au changement de statut de la quantité négative : de commodité algébrique elle devient un véritable objet mathématique dont l'étude a un intérêt en soi.

1 Introduction

Les enseignants le savent bien : l'introduction des nombres négatifs est toujours un moment délicat dans la scolarité d'un élève. En effet, les nombres positifs, qui reviennent à utiliser ses doigts pour compter peuvent toujours être raccrochés à la réalité sensible : compter des patates, bonbons, billes etc. Le nombre négatif, lui, est plus difficile à appréhender. il est généralement introduit comme étant un déplacement par rapport à une origine [1]. Ce faisant, on donne une autre interprétation aux nombres positifs qui ne servent plus uniquement à dénombrer mais aussi à mesurer un déplacement relatif par rapport à une origine.

Dans cette note, nous essayons d'adopter une perspective historique sur ce sujet. Nous allons nous intéresser à l'histoire des nombres négatifs et des nombres relatifs, à leur diffusion et à l'élaboration des règles de calcul qui leur sont propres (et notamment la règle des signes).

l'exposé s'articule en trois grandes parties : tout d'abord nous présentons les nombres entiers naturels, ou positifs en insistant sur leur lien avec la notion intuitive de comptage ; ensuite nous rappelons que les nombres négatifs sont apparus chez les grecs, chinois et arabes comme une commodité voire une nécessité liée à la pratique algébrique impliquant des nombres positifs (développement d'expressions du type $(a-b)(c-d)$) ; enfin nous nous intéressons à l'évolution des concepts liés aux quantités négatives en occident.

2 Les nombres entiers strictement positifs

Avant de comprendre quels sont les obstacles à la conception de nombres négatifs, il nous faut étudier pourquoi celle des nombres positifs est plus aisée et a été historiquement largement antérieure à celle des négatifs. Ainsi dans cette partie nous nous intéressons aux nombres entiers positifs. Nous commençons par motiver leur nécessité et

1. D'où le terme de nombre relatif, sous entendu relatifs à l'origine 0.

l'universalité de leur invention ou découverte par les sociétés humaines. Ensuite nous rappelons comment les mathématiciens modernes définissent ces entiers.

2.1 L'abstraction du nombre

Le nombre entier strictement positif est une abstraction largement partagée par les êtres humains. C'est en réalité indissociable de la capacité naturelle des êtres humains de créer une abstraction à partir de la réalité. Devant la multitude des arbres de la forêt, nous sommes pourtant capable de former le concept d'"arbre". La création d'un concept réunissant sous un même terme des objets différents conduit très rapidement à la notion de nombre. Si on réunit plusieurs entités sous le concept d'"arbre", on se demande immédiatement "combien ?". La question est donc de savoir combien d'unités sont incluses dans la pluralité du concept. Toutes les sociétés historiques, la plupart des proto-historiques [2] ont inventé un système de numération et se sont confrontées à la nécessité de dénombrer.

2.2 Constructions formalisées des entiers naturels au XIXème et XXeme siècle

Il est intéressant de voir que, lorsque les mathématiciens de la fin du XIXème siècle ont cherché à construire l'ensemble des entiers naturels, ils ont formalisé le processus que nous avons évoqué plus haut, à savoir l'abstraction du nombre à partir d'une collection finie d'objets.

Construction de Frege. Frege [Frege, 1895], et Russell après lui, se sont penchés longuement sur ce qu'est un nombre entier. La définition qu'ils ont proposé correspond globalement à la notion moderne d'équipotence. Deux ensembles ont le même nombre d'éléments s'il existe une fonction bijective mettant en correspondance les deux ensemble. Le problème est ainsi résumé par Frege : "on se rapprocherait plus de la vérité en disant que c'est [3] l'espèce ou la classe des pluralités formées d'une unité adjointe à une autre unité. Mais pour que cela fût exact, il faudrait avoir une bonne définition des termes unité et pluralité.".

Construction de Von Neumann. Notons également que la construction ensembliste de l'ensemble $\mathbb{N}$, due à Von Neumann [von Neumann, 1923], que l'on retrouve encore de nos jours dans les manuels de théorie des ensemble. Cette construction est très instructive puisqu'elle construit successivement des objets ensemblistes qui sont appelés ensuite les nombres. En effet, on commence par considérer l'ensemble vide $\emptyset$ et on crée un ensemble $\{\emptyset\}$, que l'on appelle 1 et qui est composé du singleton "ensemble vide". Ensuite on crée 2 comme l'ensemble $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ et ainsi de suite.

2.3 Des constructions qui ne donnent pas de sens à des quantités négatives

Le point commun à toutes ces constructions est qu'elles ne donnent pas a priori de sens à des quantités négatives, qui correspondraient à, pour reprendre le mot fameux de

2. Songeons aux Incas qui ont inventé un système de calcul très avancé, le système des quechuas, sans avoir d'écriture et donc sans rentrer dans la catégorie des civilisations historiques.

3. On parle ici du nombre deux".

Lazare Carnot, : "retirer quelque chose de zéro, quelque chose de rien, ce qui est impossible." [Carnot, 1803]

Comme l'illustre cette citation, les mathématiciens occidentaux ont considéré pendant très longtemps l'impossibilité des négatifs. Et pour une raison fondamentale : dans les constructions des nombres positifs, le zéro [4] est une quantité *absolue*, et non pas une origine à partir de laquelle on mesure. La science occidentale a soigneusement évité d'utiliser les nombres négatifs durant des siècles. Leur premier usage en occident daterait du XVème siècle mais même à partir de ce moment, les savants ont très longtemps considéré leur emploi comme suspect et ont développé des trésors d'ingéniosité pour les éviter. Descartes, inventeur de la géométrie repérée choisissait soigneusement ses repères de sorte à éviter l'emploi de quantités négatives. Le fameux follium de Descartes (courbe d'équation cartésienne $y^3 + x^3 = 3xy$) n'était considéré par le célèbre mathématicien que pour les x, y positifs ou nuls (voir l'article Boyé).

La construction moderne des entiers relatifs. Il est très instructif de considérer la construction moderne de l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs à partir de celui des entiers positifs (ou naturels) $\mathbb{N}$. Elle diffère totalement des constructions à partir du dénombrement que nous avons décrit pour les entiers positifs. D'ailleurs, l'intuition et la pédagogie dans les classes de cours primaires ou secondaires présentent généralement l'entier relatif comme étant un déplacement par rapport à une référence. Les mathématiques contemporaines formalisent cela en disant que $\mathbb{Z}$ est l'ensemble quotient de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pour la relation d'équivalence $(a, b) \sim (a', b')$ si et seulement si $a + b' = a' + b$ [5].

Ainsi, le nombre relatif est une abstraction d'une abstraction (la différence constante) et il est donc compréhensible que sa construction pose plus de problèmes que celle de l'entier naturel.

Dans la partie suivante, nous allons nous intéresser aux contextes qui ont fait apparaître des nombres négatifs (et plus généralement relatifs).

3 L'apparition d'une commodité algébrique

Les nombres négatifs sont apparus dans des calculs algébriques assez tôt dans l'histoire, mais, comme nous allons le voir dans cette partie, ces quantités étaient vues simplement comme des intermédiaires de calcul. Leur contexte d'apparition était le plus souvent lié aux questions de distributivité et de développement d'expression en vue de simplifier les calculs. Un cas typique est le problème

$$19 \times 31 = (20 - 1) \times (30 + 1),$$

qui conduit immédiatement à devoir utiliser des quantités négatives en intermédiaires de calcul. Ce genre d'expression nécessite également de formuler la très célèbre la règle des signes. [6]

4. dont le statut de nombre, en occident au moins, est arrivé très tard.

5. Intuitivement cela revient à demander que la différence entre a et b soit la même qu'entre a' et b' mais on ne peut pas écrire les choses ainsi puisque, tant que $\mathbb{Z}$ n'est pas construit, la soustraction de b à a n'est pas possible si $a < b$.

6. Que les écoliers apprennent aujourd'hui sous la forme $+$ par $-$ donne $-$, $+$ par $+$ donne $+$ et $-$ par $-$ donne $+$.

3.1 Dans le monde gréco-romain

Bourbaki [Bourbaki, 1960] fait remarquer que les grecs de l'époque classique, en particulier Euclide, refusaient toute quantité négative car pour eux tout devait pouvoir s'interpréter de manière géométrique. Cependant, dans l'antiquité tardive, Diophante [7] est revenu à une vision moins géométrique et plus algébrique, cherchant uniquement à utiliser des règles de calcul. On trouve dans le premier tome de ses oeuvres, une version de la règle des signes. Bien entendu, cette règle concerne des intermédiaires de calcul dans des expressions du type $(20-1)\times(30+1)$.

3.2 Dans les textes chinois anciens

De la tradition mathématique de la Chine ancienne, il nous reste une immense somme, les "9 chapitres" et ses commentaires [Chemla and Guo, 2005]. On y découvre la vision des mathématiques des anciens chinois. Il s'agit d'une approche très algorithmique. Dans le huitième chapitre qui traite du problème dit de "La disposition rectangulaire", le ou les auteurs de l'oeuvre nous présente(nt) une méthode pour résoudre les systèmes d'équations linéaires. Cette méthode est celle que nous appelons aujourd'hui le pivot de Gauss. Le sixième problème de ce chapitre revient à résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 3x+6=10y \\ 5y+1=2x \end{cases}.$$

Ce système est bien entendu équivalent au système à coefficients négatifs suivant :

$$\begin{cases} 3x-10y=-6 \\ 5y-2x=-1 \end{cases}.$$

Les neuf chapitres abordent donc de plein front les nombres négatifs et formalisent même des règles de calcul les concernant, dont on en cite une :

"Si le positif n'a pas où entrer on le rend négatif, si le négatif n'a pas où entrer, on le rend positif." [8]

De tous les textes anciens parvenus jusqu'à nous, ceux des chinois sont de loin les plus audacieux en matière de nombre relatifs, même s'ils n'utilisaient pas de symbole pour le zéro (le concept de zéro était bien entendu présent au vu de ce que nous venons d'énoncer dans ce paragraphe).

3.3 Dans les textes arabes du Moyen-âge

La science arabe, dans la lignée de la science gréco-latine, cherchait à donner un sens géométrique aux quantités algébriques. Elle était donc méfiante envers la notion de nombres négatifs qui n'apparaissait chez eux que comme artifice de calcul. Reprenons notre expression $(20-1)\times(30+1)$. Une fois développée elle devient $20\times30+(-1)\times30+20\times1+(-1)\times1$. Al-Khwarizmi appelait chacun des termes $20\times30, (-1)\times30, 20\times1, (-1)\times1$ des *monômes* (voir Djebbar [2005]). Chaque monôme pouvait, suivant s'il était négatif ou

7. Tout ce que l'on sait c'est qu'il a vécu durant l'époque de l'occupation romaine en Egypte, ce qui laisse une incertitude de 5 siècles quant à ses dates...

8. Dans le langage moderne, cela veut dire que lorsque, durant les opérations du pivot de Gauss, on doit soustraire à une équation une inconnue qui n'y apparaît pas on doit faire apparaître un nombre négatif. Par exemple si l'on soustrait $x-z=2$ à $z=3$, la variable x n'a pas "où entrer" dans la terminologie.

positif être un monôme *retranché* ou *ajouté*. Il formule une règle des signes sans cependant la démontrer.

C'est, deux siècles plus tard, chez Ibn-Al-Khidr [Al Khidr, 1067] que l'on trouve une mention formelle de la règle des signes dans la science arabe. Elle est transcrite dans Djebbar [2005] de la manière suivante :

> «Si tu multiplies par lui-même quelque chose dont tu as retranché quelque chose, multiplie et retranche et ne considère le produit du retranché par lui-même que comme ajouté».

4 Une lente percolation en occident

Nous nous intéressons désormais à la manière dont les nombre relatifs et négatifs se sont intégrés à la science occidentale. Nous allons voir que le refus a finalement laissé place à une acceptation sous la forme d'une révolution : le nombre n'est plus l'abstraction de l'action de compter, mais bien un objet autonome. La seule contrainte sur cet objet étant l'existence de règles algébriques non-contradictoires pour les manier.

4.1 Une longue période de refus

L'algèbre arabe a assez mal circulé en Europe. Seul le livre de Al-Khwarizmi, dont l'importance fondamentale a été très rapidement compris, a bénéficié de plusieurs traductions en latin au XIIeme siècle. Cependant le passage sur les nombres négatifs ainsi que la règle des signes ne semblent ne pas avoir marqué la science occidentale. Les savants occidentaux ont durant très longtemps été réticents à l'idée que des solutions de certaines équations soient négatives. Descartes [Descartes, 1637], repris par Boyé parlait du problèmes de

> «ces racines qui sont fausses ou moindre que rien, comme si on suppose que x désigne aussi le défaut d'une quantité qui soit 5, $x + 5 = 0$[...]».

Comme Descartes, la plupart des savants de la renaissance et des temps modernes, lorsqu'ils trouvaient une solution négative ne la mentionnaient pas comme étant une solution, disant qu'il s'agissait d'une solution «fausse» ou «feinte».

Citons un exemple fameux : François Viète (XVIeme siècle), que l'on considère généralement comme l'inventeur du calcul littéral moderne, ne considérait jamais les solutions négatives de ses équations.

4.2 L'acceptation des quantités négatives

Néanmoins, dès le XVeme siècle, un courant de pensée s'est mis à considérer les racines négatives des équations comme ayant une réalité. Cardan considérait que les solutions négatives des équations devaient être mentionnées. Il n'est pas illogique que ce soit chez ceux qui veulent fonder les nombres complexes que l'on retrouve le moins de réticence à la conception des quantités négatives.

Puis, petit à petit, les savants ont accepté de travailler avec ces nombres négatifs. En occident, la règle des signes mettra du temps à s'imposer. On attribue son invention dans la science occidentale à Stevin en 1585. Sa preuve repose sur le même type de raisonnements que ceux effectués par les savants arabes cinq à six siècles auparavant. La justification la plus convaincante était donné par un raisonnement concernant le développement d'une quantité du type $(a - b)(c - d)$.

Si les progrès semblent timides tout au long des deux siècles qui suivirent, le XIXeme siècle marquera un tournant décisif dans le statut de nombre des négatifs. Il faut dire que les quantités négatives commençaient à entrer dans les moeurs. Celsius, au XVIIeme siècle proposait une échelle de température qui, contrairement à celle de Fahrenheit, pouvait conduire à des valeurs négatives.

4.3 Le XIXeme siècle et la conceptualisation moderne du nombre négatif

Les tâtonnements du début du siècle. Euler puis Cauchy [Boyé], proposent la règle des signes comme s'appliquant véritablement à des *signes* de quantités. C'est à dire que la quantité négative est un nombre positif précédé d'un signe $-$. La règle des signes est alors véritablement une règle sur les symboles $+$ et $-$. Pour ces fameux mathématiciens, le nombre négatif n'est pas un nombre sur lequel on peut calculer directement, il faut passer par l'intermédiaire du signe.

Cette règle des signes, apparaît comme une sorte d'édifice bricolé dont on peut être certain que le très rigoureux Cauchy n'en était pas satisfait. [9]

Il était passé à côté de l'essentiel et s'est laissé prendre au piège de la notation : le $-$ signe doit être distingué du $-$ de la soustraction. Le nombre négatif (avec un signe $-$ devant) doit avoir le même statut que le nombre positif. En d'autres termes, il faut dépasser la vision du nombre négatif comme *quantité positive retranchée*.

La résolution de la question : une petite révolution initiée chez les mathématiciens professionnels par Hankel. C'est finalement Hankel (1839-1873) qui démêlera l'écheveau [10]. Pour lui, les règles du calcul algébrique n'ont pas à dépendre de l'existence ou non d'un signe. Il analyse les approches de ceux qui ont réfléchi à la question avant lui. L'erreur de ses prédécesseurs résidait dans leur volonté de lier la notion de nombre à celle du comptage, à vouloir trouver une réalité sensible au nombre. Avec cette manière de penser, il est impossible de donner du sens à des quantités négatives et a fortiori des quantités complexes [11].

La seule solution pour résoudre ce problème est de ne plus lier le nombre à la notion de comptage. Le nombre doit être un objet sur lequel des règles logiques de calcul peuvent être appliquées. Ces règles doivent avoir pour seules contraintes de ne conduire à aucune espèce de contradiction logique.

Il affirme très nettement sa pensée [Hankel, 1867] :

> «Si les nombres considérés sont logiquement possible, si leur concept est défini clairement et distinctement, s'il est donc libre de toute contradiction, la question ne peut plus être de savoir sil y a dans le domaine du réel, dans ce qui est intuitif ou actuellement donné un substrat pour ce nombre, s'il existe des objets qui

9. Pour lui, le «nombre négatif», au même titre que le «nombre imaginaire» (le i des complexes) ne méritaient pas vraiment le statut de nombre. Ils n'étaient tout au plus que des artifices calculatoires. Ils n'étaient qu'« une combinaison de signes algébriques qui ne signifie rien en elle-même».

10. En tous cas au sein de l'institution universitaire. En effet, dès 1828 Claude-Victor Mourey dans son ouvrage [Mourey, 1828] avait parfaitement identifié que le problème principal venait de ce que l'on voulait donner au signe $-$ une valeur de soustraction d'une quantité positive. Pour ce grand amateur du calcul vectoriel, il ne saurait y avoir qu'un seul type de nombres, positifs ou négatifs sur lesquels on effectue une seule opération : l'addition. Mais, Mourey, hors de l'institution universitaire n'a pas eu l'écho qu'il méritait.

11. Qui, comme les quantités négatives, ont mis un long moment avant d'être acceptées. Le vocabulaire qui leur est associé est fort éloquent à ce propos : "nombre imaginaire", "quantité complexe" etc.

puissent donner matière aux nombres en tant qu'ils sont relations intellectuelles d'un certain type.»

Hankel avait ainsi ouvert la voie, après lui les nombres négatifs ont trouvé leur place au milieu des autres nombre. Quelques années plus tard, les mathématiciens donnaient une vision très aboutie de ce qu'était un nombre réel, la question de la réalité sensible du nombre paraissait alors être un lointain débat.

5 Conclusion

Durant notre promenade aux quatre coins du globe et au fil des siècles nous avons pu voir que les nombres négatifs ont longtemps posé problème aux mathématiciens qui voulaient donner au nombre une réalité sensible provenant de notions concrètes comme celles de comptage ou de partage.

On pourrait dire beaucoup encore sur l'histoire des ces nombres, notamment du lien avec le zéro vu comme origine et non pas comme vide absolu ou encore en allant voir du côté de l'Inde ancienne qui, très similairement aux anciens chinois usaient de ces quantités négatives.

Cette brève note nous a donné une idée des raisons qui rendent la pédagogie et l'enseignement autour des entiers relatifs difficile. C'est une notion qui n'a rien d'évidente et, contrairement à celle d'entier positif qui n'est finalement que la notion de comptage, nécessite un fort degré d'abstraction.

Références

Ibn Al Khidr. *Livre du rappel des fondements du calcul et des héritages*. 1067.

Nicolas Bourbaki. *Elements d'histoire des mathématiques*. Hermann, 1960.

Anne Boyé. Quelques éléments d'histoire des nombres négatifs. *Proyecto Penélope*.

Lazare Carnot. *Géométrie de position*. Duprat, 1803.

Karine Chemla and Shuchun Guo. *Les neufs chapitres, le classique mathématique de la Chine ancienne*. Dunod, 2005.

René Descartes. *La géométrie*. 1637.

Ahmed Djebbar. *L'algèbre arabe, genèse d'un art*. Vuibert, 2005.

Gottlob Frege. Le nombre entier. *Revue de métaphysique et de morale*, 3 :73–78, 1895.

Herman Hankel. *Théorie du système des nombres complexes*. 1867.

Claude-Victor Mourey. *La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires*. 1828.

John von Neumann. Zur Einführung der transfiniten Zahlen. *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)*, 1(4) :199–208, 1923.