Une démonstration élémentaire du théorème du minimax de Von Neumann (existence d'un équilibre de Nash dans le contexte d'un jeu à deux joueurs à somme nulle).

Rémi Lajugie

mail prenom.nom@ac-limoges.fr

Avril 2024

Résumé

Dans cette note, nous présentons une démonstration simple (accessible à des étudiants de premier cycle universitaire) du théorème de minimax de Von Neumann pour les jeux à deux joueurs à somme nulle. Il s'agit d'un cas particulier important du théorème d'existence d'un équilibre de Nash pour un jeu.

1 Introduction

Le théorème du minimax de Von Neumann est au fondement d'une grande partie de la théorie des jeux modernes. Il démontre l'existence d'un équilibre de Nash dans le cadre des jeux à deux joueurs à somme nulle. Il en existe plusieurs démonstrations, l'originale reposant sur une interprétation astucieuse de l'ensemble d'étude [von Neumann, 1928] la plupart des approches modernes reposant sur la dualité en programmation linéaire [Boyd and Vandenberghe, 2004] ou sur l'approximation des stratégies de jeu au moyen d'un algorithme d'apprentissage par renforcement [Cesa-Bianchi and Lugosi, 2006]. Ces preuves sont néanmoins hors de portée à l'aide des outils du premier cycle universitaire et freinent considérablement la diffusion de la théorie des jeux dans le cursus des étudiants, obligeant à admettre les résultats les plus fondamentaux.

Dans cette note, on présente une démonstration du théorème du minimax de Von Neumann qui n'utilise que des arguments accessibles à des étudiants de premier cycle universitaire. Notre démonstration ne prétend pas être la seule démonstration élémentaire de ce résultat et possède d'intéressantes connexions avec la preuve proposée par Jean Ville dans les années 1930, cf. [Ville, 1938] ou [Sion, 1958].

2 Cadre général

On considère deux joueurs Alice et Bob. Ils s'affrontent sur un jeu qui a les propriétés suivantes :

— Alice a un ensemble $\mathcal{A}$ de n_1 actions à sa disposition, Bob a un ensemble $\mathcal{B}$ de n_2 actions à disposition.

— Ils jouent simultanément et ont immédiatement une récompense dont la somme est nulle. C'est à dire que ce que Bob gagne est perdu par Alice. Ainsi, on peut introduire naturellement la fonction de gain $G : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \mapsto \mathbb{R}$ qui associe la récompense obtenue du point de vue d'Alice pour chaque couple d'actions possibles.

Un tel jeu peut se représenter par une matrice de gain $A \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$. En position $A_{i,j}$ on représente la valeur de gain correspondant à la i ème action d'Alice et la j ème de Bob.

Par exemple, dans un jeu où les joueurs ont 2 actions chacun, on peut imaginer la matrice de gains suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Evidemment, chaque joueur cherche à maximiser son gain moyen.
Introduisons la notion de *stratégie*.

Définition 1. *Une stratégie pour Alice (resp. Bob) est un vecteur $u \in \mathbb{R}^{n_1}$ (resp. $\in \mathbb{R}^{n_2}$), tel que $u_i \geq 0$ pour tout i et $\sum_{i=1}^{n_1} u_i = 1$ (resp. $\sum_{i=1}^{n_2} u_i = 1$).*

On note Δ_{n_1} l'ensemble des stratégies d'Alice et Δ_{n_1} celui des stratégies de Bob.

Fait 1. *L'ensemble des stratégies est un ensemble convexe.*

Fait 2. *Etant données deux stratégies $p \in \mathbb{R}^{n_1}$ et $q \in \mathbb{R}^{n_2}$ alors le gain moyen d'Alice et Bob s'ils jouent en respectant cette stratégie vaut $p^\top Aq$.*

Définition 2. *On dit qu'un couple de stratégies $(p, q) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ est un* équilibre de Nash *si aucun des deux joueurs n'a intérêt à modifier sa stratégie.*

Autrement dit $p_1{}^\top Aq_1 = \max_{p\in\Delta_{n_1}} \min_{q\in\Delta_{n_1}} p^\top Aq$ (Alice n'a pas intérêt à modifier sa stratégie à supposer que Bob tente de minimiser le gain de l'adversaire) ET $p_1{}^\top Aq_1 = \min_{q\in\Delta_{n_1}} \max_{p\in\Delta_{n_1}} p^\top Aq$ (Bob n'a pas d'intérêt non plus à changer sa stratégie).

3 La démonstration

On va démontrer le résultat suivant, appelé théorème du minimax de Von Neumann.

Théorème 1. *Si $A \in \mathbb{R}^{n_1\times n_2}$, Δ_{n_1}, Δ_{n_1} sont les ensembles convexes correspondant aux stratégies possibles (distributions de probabilités), alors :*

$$\max_{p\in\Delta_{n_1}} \min_{q\in\Delta_{n_1}} p^\top Aq = \min_{q\in\Delta_{n_1}} \max_{p\in\Delta_{n_1}} p^\top Aq$$

3.1 Quelques faits préliminaires

Fait 3. *A q fixé, la fonction $f(p) = p^\top Aq$ admet un maximum sur Δ_{n_1}.*

Fait 4. *La fonction $f : q \mapsto \max_{p\in\Delta_{n_1}} p^\top Aq$ est continue sur Δ_{n_1}.*

Fait 5. *La quantité $\min_{q\in\Delta_{n_1}} \max_{p\in\Delta_{n_1}} p^\top Aq$. Il en va de même pour $\max_{p\in\Delta_{n_1}} \min_{q\in\Delta_{n_1}} p^\top Aq$.*

3.2 Le coeur de la démonstration

Fait 6. *On a :*

$$\max_{p\in\Delta_{n_1}} \min_{q\in\Delta_{n_1}} p^\top Aq \leq \min_{q\in\Delta_{n_1}} \max_{p\in\Delta_{n_1}} p^\top Aq.$$

Démonstration. C'est un résultat universel. En effet, on a toujours pour tout $\tilde{q} \in \Delta_{n_1}$, $\max_{p\in\Delta_{n_1}} \min_{q\in\Delta_{n_1}} p^\top Aq \leq \max_{p\in\Delta_{n_1}} p^\top A\tilde{q}$ et ceci reste vrai en passant au min sur $\tilde{q}$ dans la quantité de droite. □

On pose $\alpha = \max_{p\in\Delta_{n_1}} \min_{q\in\Delta_{n_1}} p^\top Aq$ et $\beta = \min_{q\in\Delta_{n_1}} \max_{p\in\Delta_{n_1}} p^\top Aq$. La différence $\beta - \alpha$ s'appelle le *saut de dualité*. Nous allons démontrer qu'il est nul.

Fait 7. *Il existe $p_1, p_2 \in \Delta_{n_1}$ et $q_1, q_2 \in \Delta_{n_1}$ tels que*

$$\alpha = p_1{}^\top Aq_1 \ \text{ et } \ \beta = p_2{}^\top Aq_2.$$

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence du théorème des bornes atteintes. □

On peut désormais terminer la preuve du théorème 1.

Démonstration. En reprenant les notations du Fait 7, il apparaît que l'on a

$$p_1^\top A q_1 \leq p_2^\top A q_2.$$

Introduisons la fonction

$$f : \lambda \in [0;1] \mapsto p_2^\top A \left(\lambda q_2 + (1 - \lambda q_1)\right).$$

- Il s'agit d'une fonction continue en λ.
- On a $f(0) = p_2^\top A q_1 \leq \max_{p \in \Delta_{n_1}} p^\top A q_1 = p_1^\top A q_1 = \alpha$.
- Et d'autre part, $f(1) = p_2^\top A q_2 = \beta \geq \alpha$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in [0;1]$ tel que $\alpha = p_2^\top A \left(\lambda q_2 + (1 - \lambda q_1)\right)$.

De plus, par convexité de Δ_{n_1}, $\lambda q_2 + (1 - \lambda) q_1 \in \Delta_{n_1}$. Donc le point précédent nous assure qu'il existe $\tilde{q} \in \Delta_{n_1}$ tel que $\alpha = p_2^\top A \tilde{q}$.

Or, par définition $p_2^\top A \tilde{q} \geq p_2^\top A \tilde{q}_2 = \beta$.

On en déduit donc que $\alpha \geq \beta$.

Bilan : $\alpha = \beta$ et il n'y a pas de saut de dualité. Autrement dit :

$$\max_{p \in \Delta_{n_1}} \min_{q \in \Delta_{n_1}} p^\top A q \leq \min_{q \in \Delta_{n_1}} \max_{p \in \Delta_{n_1}} p^\top A q.$$

$\square$

Références

Stephen P Boyd and Lieven Vandenberghe. *Convex optimization*. Cambridge university press, 2004.

Nicolo Cesa-Bianchi and Gábor Lugosi. *Prediction, learning, and games*. Cambridge university press, 2006.

Maurice Sion. On general minimax theorems. *Pacific Journal of Mathematics*, 1958.

Jean Ville. Sur la théorie générale des jeux ou intervient l'habileté des joueurs. *Traité du Calcul des Probabilités et des ses Applications', Paris, Gauthiers-Villars*, 171, 1938.

John von Neumann. Zur theorie der gesellschaftsspiele. *Mathematische annalen*, 100(1) :295–320, 1928.